

Параллельность.

1. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу равна 1. Один из острых углов равен 15° . Найдите гипотенузу.
2. Постройте треугольник по периметру и двум углам.
3. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.

Окружность.

4. Пусть r - радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Докажите, что $r = \frac{a+b-c}{2}$.
5. В треугольник со сторонами 6, 10, 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.
6. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.
7. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекает их общую касательную, проходящую через точку K в точке M . Докажите, что $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$.

Параллелограмм.

8. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
9. Окружность, построенная на стороне BC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N . Отрезки CM и BN пересекаются в точке P . Докажите, что AP перпендикулярно BC .
10. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на диаметре, ни на окружности).
11. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри этого угла, делится бы данной точкой пополам.
12. Постройте выпуклый четырехугольник по данным серединам трех его равных сторон.
13. Постройте квадрат по его центру, и двум точкам, лежащим на противоположных сторонах.
14. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами еще одного квадрата.
15. Через произвольную точку внутри квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.
16. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A , и делит этот отрезок пополам.
17. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все, кроме этих точек, стерли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.
18. Дана линейка с делениями в 1 см. Проведите какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой.

Средняя линия.

19. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.
20. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника равны. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.
21. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.
22. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD .
23. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC . Найдите угол, образованный продолжениями сторон AB и CD .
24. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C . Найдите отрезок PM , если периметр треугольника ABC равен 10.
25. Точки M и N - середины соседних сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые DM и BN пересекаются на диагонали AC .

26. Постройте треугольник по трем медианам.

27. Точки A_1 , B_1 и C_1 - образы произвольной точки O при симметрии относительно середин сторон соответственно BC , AC и AB треугольника ABC . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

28. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что диагонали равны.

29. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O . Найдите расстояние от точки O до середины AB , если известно, что $CD = a$.

30. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны.

31. Точки K , L , M и N - середины сторон соответственно AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$, а точки P и Q - середины отрезков соответственно KM и LN . Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{1}{4}AE$.

32. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

Трапеция.

33. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C меньшего основания BC равнобокой трапеции $ABCD$ на ее большее основание AD . Найдите DP и AP , если $AD = a$ и $BC = b$.

34. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.

35. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

36. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный 30° . Найдите среднюю линию трапеции.

37. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.

38. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N . Найдите MN , если известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$.

39. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

40. Найдите отношение оснований трапеции, если ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

41. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

42. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K . Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B , а вторая — в различных точках C и D . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку K пересекается с этими прямыми в точках M и N . Найдите MN , если $AC = a$, $BD = b$, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой MN .

43. Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.

44. Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание было бы равно сумме боковых сторон.

Площадь.

45. Дан треугольник ABC . Найдите геометрическое место таких точек M , для которых

- а) треугольники AMB и ABC равновелики;
- б) треугольники AMB и AMC равновелики;
- в) треугольники AMB , AMC и BMC равновелики.

46. Пусть M — точка на стороне AB треугольника ABC , причем $AM : MB = m : n$. Докажите, что площадь треугольника CAM относится к площади треугольника CBM как $m : n$.

47. Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, причем $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что площади треугольников AMN и ABC относятся как $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$.

48. Стороны треугольника с площадью, равной 1, разделены в отношении $2 : 1$ по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

49. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади исходного.

50. Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах диагоналей и серединах оснований, если боковые стороны равны a и b .
51. Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.
52. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки на основании равнобедренного треугольника до его боковых сторон всегда одна и та же.
53. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности.
54. Докажите теорему Пифагора, используя результат предыдущей задачи.
55. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания со вписанной окружностью.
56. Окружность касается стороны треугольника, равной a , и продолжения двух других сторон. Докажите, что радиус окружности равен площади треугольника, деленной на разность между полупериметром и стороной a .
57. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Вписанный угол.

58. Докажите, что угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.
59. Угловые величины противоположных дуг, высекаемых на окружности пересекающимися хордами, равны α и β . Найдите угол между хордами.
60. Угловые величины дуг, заключенных между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны α и β (считаем, что $\alpha > \beta$). Под каким углом пересекаются продолжения хорд?
61. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.
62. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1 .
63. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B , пересекаются в точке C . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.
64. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB , пересекающие вторую окружность в точках P и Q . Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.
65. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.
66. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности.
67. A и B — фиксированные точки окружности, C — произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения а) биссектрис; б) высот треугольника ABC .
68. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности этого треугольника.
69. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , AH — высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.
70. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , O — центр его описанной окружности. Докажите, что $CO \perp A_1B_1$.
71. В треугольнике ABC , ($AC \neq BC$) проведена биссектриса угла C . Докажите, что она делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.
72. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины.
73. Докажите, что высоты остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами его ортотреугольника.
74. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

Подобные треугольники.

75. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B . Докажите, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ , которая равна $\frac{1}{n+1}$ всей диагонали.
76. Боковая сторона трапеции разделена на пять равных частей и через третью точку деления (считая от вершины меньшего основания) проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите отрезок прямой, заключенный между сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b ($a > b$).
77. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на n равных частей.

78. (*Замечательное свойство трапеции.*) Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований любой трапеции лежат на одной прямой.
79. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.
80. Параллельно основаниям трапеции проведите прямую, отрезок которой, заключенный внутри трапеции делится бы ее диагоналями на три равные части.
81. а) Даны отрезки a , b и c . Постройте такой отрезок x , что $x : a = b : c$.
б) Даны отрезки a , b , c , d и e . Постройте отрезок, равный $\frac{abc}{de}$.
82. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.
83. Площадь треугольника ABC равна S . Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC .
84. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят боковую сторону на отрезки длиной m и n , считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.
85. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC , причем $AK : KB = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B проведена прямая l , параллельная AC . Прямая KM пересекает l в точке P , а прямую AC в точке N . Найдите BP и CN , если $AC = a$.
86. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
87. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Найдите в каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла C ?
88. Через точку K , данную на стороне AB треугольника ABC , проведите прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника ABC пополам.
89. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 . С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них.
90. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 . С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l_1 и l_2 .
91. Теорема Менелая.
92. Теорема Чебы.
93. Докажите, что в одной точке пересекаются
а) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон треугольника (*точка Жергона*);
б) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых внеписанные окружности касаются противоположных сторон треугольника (*точка Нагеля*);
94. Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причём точка M расположена между точками O и H , и $MH = 2MO$.
95. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот H с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*), причём центром этой окружности является середина отрезка OH , где O — центр описанной окружности.
96. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по трём высотам.
97. Все стороны выпуклого четырёхугольника площади 1 разделены на три равные части. Отрезки, соединяющие соответствующие точки деления на противоположных сторонах, разбивают четырёхугольник на 9 четырёхугольников. Найдите площадь внутреннего четырёхугольника разбиения.
98. (*Теорема Птолемея*) Докажите, что если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению его диагоналей.